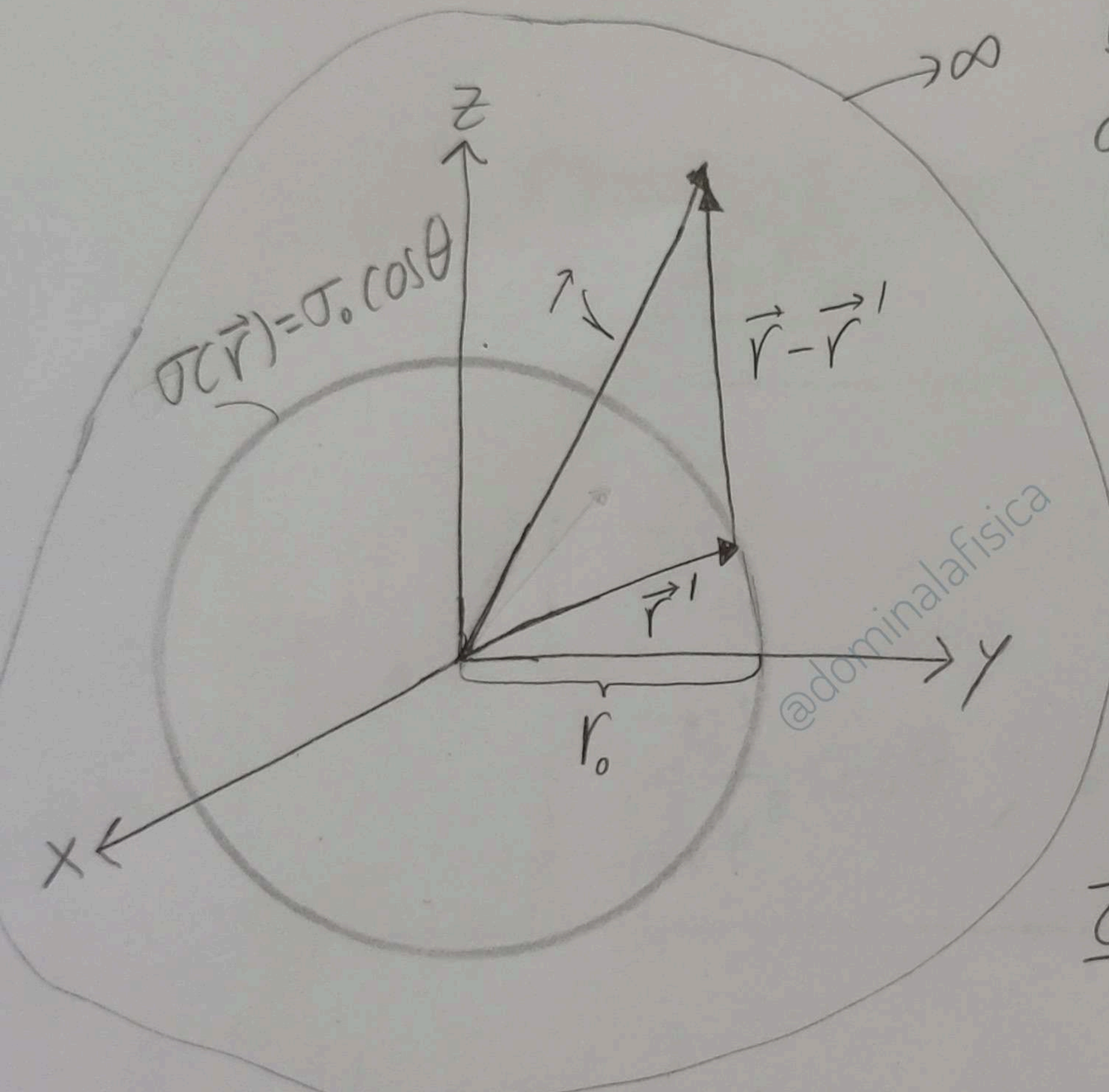
Potencial y Campo Eléctrico de una Superficie Esférica con Densidad de Carga

$$\sigma(\vec{r}) = \sigma_0 \cos\theta$$



En el gráfico, el punto de observación $\vec{r}$ va fuera de la esfera, pero se calculará para dentro y fuera de la esfera.

Primero se determinará el potencial eléctrico

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, da'$$

$$\sigma(\vec{r}\,') = \sigma_0 \cos\theta'$$

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = r\,\hat{e}_r$$

$$\vec{r}\,' = x'\hat{\imath} + y'\hat{\jmath} + z'\hat{k} = r_0\,\hat{e}_r\,'$$

Coordenadas esféricas

Dentro de la esfera: $r \leq r_0$

Fuera de la esfera: $r > r_0$

$$da' = r_0^2 \,\text{sen}\,\theta' d\theta' d\varphi' \quad ; \quad \begin{array}{l} 0 \le \theta' \le \pi \\ 0 \le \varphi' < 2\pi \end{array}$$

Para el término $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ se utilizará una expansión en armónicos esféricos.

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell m}^{*}(\theta',\varphi')\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \frac{r^{\ell}}{r'^{\ell+1}} ; & r<r' \\ \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell m}^{*}(\theta',\varphi')\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} ; & r>r' \end{cases}$$

Dada la similitud entre ambas expresiones se suele expresar $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ de una manera más compacta.

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell m}^{*}(\theta',\varphi')\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}}$$

$r_< \equiv$ El menor entre r y r'

$r_> \equiv$ El mayor entre r y r'

Como en este caso se trabaja con una superficie: $\underline{r' = r_0}$

Se sustituye la expansión en la integral:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, da'$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\theta' \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{\cancel{4\pi}}{2\ell+1} Y^*_{\ell m}(\theta',\phi')\, Y_{\ell m}(\theta,\phi)\, \frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}}\, r_0^2 \operatorname{sen}\theta'\, d\theta'\, d\phi'$$

Conviene expresar $\cos\theta'$ en términos de armónicos esféricos

$$\cos\theta' = N_{10}\, Y_{10}(\theta',\phi') \quad ; \quad N_{10} \equiv \text{Constante de normalización}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{N_{10}\, r_0^2}{2\ell+1}\frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}} Y_{\ell m}(\theta,\phi) \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y^*_{\ell m}(\theta',\phi')\, Y_{10}(\theta',\phi') \operatorname{sen}\theta'\, d\theta'\, d\phi'$$

Se aplica la relación de ortogonalidad de los $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y^*_{\ell m}(\theta,\phi)\, Y_{\ell' m'}(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi = \delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'}$$

Para este caso $\ell' = 1 \quad ; \quad m' = 0$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{N_{10}\, r_0^2}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}(\theta,\varphi)\, \delta_{l1}\, \delta_{m0}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

De la suma m se hacen 0 todos los términos $m \neq 0$, y de la suma l se anulan todos los términos $l \neq 1$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} N_{10}\, r_0^2 \frac{r_<}{r_>^2} Y_{10}(\theta,\varphi)$$; Sólo quedan el término con $l=1 \wedge m=0$

$$\cos\theta = N_{10}\, Y_{10}(\theta,\varphi)$$

$$\therefore \Phi(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} r_0^2 \frac{r_<}{r_>^2} \cos\theta$$

Dentro de la esfera: $r < r^0$; $r' = r_0$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} \cancel{r_0^2} \frac{r}{\cancel{r_0^2}} \cos\theta \quad ; \quad r_< = r \wedge r_> = r_0$$

$$\therefore \boxed{\Phi(\vec{r}) = \frac{\sigma_0 z}{3\varepsilon_0} \; ; \; r < r_0} \quad ; \quad z = r\cos\theta$$

Fuera de la esfera: $\underline{r > r_0}$; $r_0 = r'$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} r_0^2 \frac{r_0}{r^2} \cos\theta \quad ; \quad r_< = r_0 \wedge r_> = r$$

$$\therefore \boxed{\Phi(\vec{r}) = \frac{\sigma_0 r_0^3}{3\varepsilon_0 r^2} \cos\theta \quad ; \quad r > r_0}$$

$$\therefore \boxed{\Phi(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_0 z}{3\varepsilon_0} & ; \quad r \leq r_0 \\[2ex] \dfrac{\sigma_0 r_0^3}{3\varepsilon_0 r^2} \cos\theta & ; \quad r > r_0 \end{cases}}$$

Para determinar el campo eléctrico se usa:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$$

Dentro de la esfera:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(x, y, z) = -\vec{\nabla}\left(\frac{\sigma_0 z}{3\varepsilon_0}\right) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{\sigma_0 z}{3\varepsilon_0}\right)\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\hat{k} \quad ; \quad r < r_0}$$

Fuera de la esfera:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(r,\theta,\phi)$$

En coordenadas esféricas:

$$\vec{\nabla}\Phi(r,\theta,\phi) = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat{e}_\phi$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\sigma_0 r_0^3}{3\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -2\frac{\sigma_0 r_0^3}{3\varepsilon_0 r^3}\cos\theta \quad ; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -\frac{\sigma_0 r_0^3}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{sen}\theta \longrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = -\frac{\sigma_0 r_0^3}{3\varepsilon_0 r^3}\mathrm{sen}\theta$$

$$\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = -2\frac{\sigma_0 r_0^3}{3\varepsilon_0 r^2}\cos\theta\,\hat{e}_r - \frac{\sigma_0 r_0^3}{3\varepsilon_0 r^3}\mathrm{sen}\theta\,\hat{e}_\theta$$

$$= -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\left(2\cos\theta\,\hat{e}_r + \mathrm{sen}\theta\,\hat{e}_\theta\right)$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\left(2\cos\theta\,\hat{e}_r + \mathrm{sen}\theta\,\hat{e}_\theta\right) \quad ; \quad r > r_0}$$

$$\therefore \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\hat{k} & ; \; r < r_0 \\[2ex] \dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^3 \left(2\cos\theta\,\hat{e}_r + \operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_\theta\right) & ; \; r > r_0 \end{cases}}$$

Como ocurre con cualquier superficie cargada, el campo eléctrico es discontinuo en la superficie $(r = r_0)$